Διαφορικό διαφορίσιμων συναρτήσεων.

$f: S \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη, $p \in S$ $df_p: T_p \to S$ $df_p(w) = (f \circ c)'(0)$
$c(-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, $c(0) = p$, $c'(0) = w$.

παράδειγμα: $e \in \mathbb{R}^3$, $h: S \to \mathbb{R}$, $h(p) = \langle p, e \rangle$.
$dh_p(w) = (h \circ c)'(0)$, $h \circ c(t) = \langle c(t), e \rangle$.

Παρατήρηση: Έστω S κανονική επιφάνεια και $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$. Τότε το σύνολο $\tilde{S} = T(S)$ είναι επίσης κανονική επιφάνεια.
$X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ είναι σύστημα συντ/νων της S. Τότε $\tilde{X} = T \circ X: U \to \tilde{S}$ είναι σύστημα συντ/νων της $\tilde{S}$.

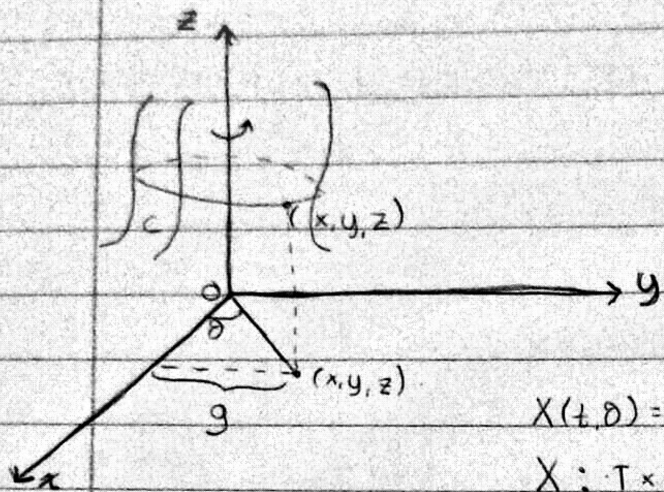
Παραμετρικές επιφάνειες

Ορισμός: Μια λεία απεικόνιση $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ όπου $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό καλείται παραμετρική επιφάνεια. Η X καλείται κανονική παραμετρική επιφάνεια αν-ν $X_u \times X_v \neq 0$.

→ Σχέση μεταξύ κανονικών επιφανειών και κανονικών παραμετρικών επιφανειών:

Πρόταση: Έστω $X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ κανονική παραμ. επιφάνεια. Για $q_0 \in U$ υπάρχει περιοχή του $U_0 \subseteq U$ ώστε το $X(U)$ να είναι κανονική επιφάνεια

Επ. περιστροφής επιφάνειες:



$c: I \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (f(t), 0, g(t))$.

κανονική

$z = g(t)$

$x = f(t)\cos\theta$

$y = f(t)\sin\theta$

$X(t,\theta) = (f(t)\cos t, f(t)\sin t, g(t))$

$X: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

→ Είναι κανονική;

$X_t(t,\theta) = (f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, g'(t))$.

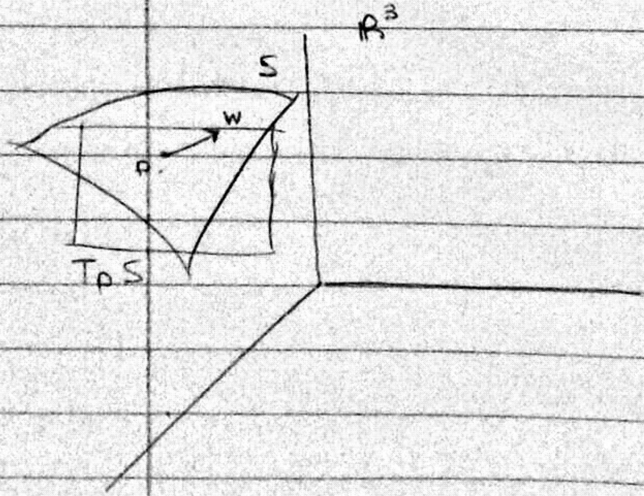
$X_\theta(t,\theta) = (-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta, 0) = f^2 \{\underbrace{(g')^2 + (f')^2}_{\to 0}\}$

$$X_t \times X_\theta(t,\theta) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f'\cos\theta & f'\sin\theta & g' \\ -f\sin\theta & f\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-fg'\cos\theta, -fg'\sin\theta, ff')$$

$$= f(-g'\cos\theta, -g'\sin\theta, f')$$

→ Παραμετρικές ~~καμπύλες~~ επιφάνειες με z = σταθερό είναι κύκλοι

→ -"- -"- με θ = σταθερές είναι επιφάνειες γεωμετρικά ισότιμες.



$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$

$\langle u, w \rangle = u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3$

$T_pS \subseteq T_p\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3$

$\langle , \rangle : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$.

Πρωτη Θεμελιωδης Μορφη:

Ορισμος: Εστω S κανονική επιφανεια και $p \in S$. Ονομαζουμε πρωτη θεμελιώδη μορφή της S στο p την τετραγωνική μορφή του $\langle , \rangle_p$ δηλ. του

$I_p : T_pS \to \mathbb{R}$, $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2$

$\|w_1 + w_2\| = \|w_1\|^2 + 2\langle w_1, w_2\rangle_p + \|w_2\|^2 \Leftrightarrow$

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \frac{1}{2}\left\{ I_p(w_1+w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \right\}$$

Μηκος: $\|w\| = \sqrt{I_p(w)}$

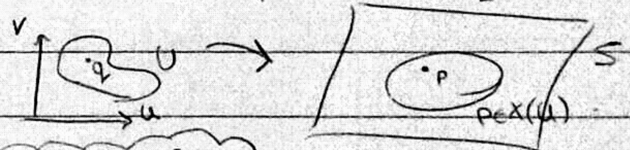
Γωνια διανυσματος: $w_1, w_2 \in T_pS \setminus \{0\}$, $\cos\theta = \dfrac{\langle w_1, w_2\rangle_p}{\sqrt{I_p(w_1)}\sqrt{I_p(w_2)}}$

Μηκος καμπυλης: $c : I \subset \mathbb{R} \to S$

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{I_{c(t)}(c'(t))}\,dt$$

→ Εστω $X : U \to S$ συστημα συντ/νων του S με παραμετρους (u,v) $p \in X(U)$

$\{X_u(q), X_v(q)\}$ βαση του T_pS.



Ο πινακας της I_p ειναι ο $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

$E > 0$ $G > 0$
$EG - F^2 > 0$

Οπου $E = \langle X_u, X_u \rangle$

$F = \langle X_u, X_v \rangle$ $\quad E, F, G : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$G = \langle X_v, X_v \rangle$ $\quad$ καλουνται θεμελιώδη ποσα $1^{ης}$ ταξης του X.

• $w \in T_pS$, $w = aX_u + bX_v$

$I_p(w) = \|w\|^2 = \|aX_u + bX_v\|^2 = a^2\|X_u\|^2 + 2ab\langle X_u, X_v\rangle + b^2\|X_v\|^2$

$\boxed{I_p(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$

Μηκος $\|w\| = \sqrt{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$

Γωνια $w_1 = a_1X_u + a_2X_v$, $w_2 = b_1X_u + b_2X_v$.

$$\cos\theta = \frac{\langle w_1, w_2\rangle}{\|w_1\|\|w_2\|} = \frac{a_1b_1E + (a_1b_2 + a_2b_1)F + a_2b_2G}{\sqrt{Ea_1^2 + 2Fa_1a_2 + Ga_2^2}\sqrt{Eb_1^2 + 2Fb_1b_2 + Gb_2^2}}$$

Μήκος καμπύλης

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to X(U)$, $c(t) = X(u(t), v(t))$

$$L_a^b = \int_a^b \|c'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{I_{c(t)}(c'(t))}\, dt$$

$$c'(t) = u'(t) X_u(u(t), v(t)) + v'(t) X_v(u(t), v(t))$$

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{(u'(t))^2 E + 2u'v'F + (v')^2 G}\, dt.$$

→ Γωνία των παραμετρικών καμπυλών είναι:

$$\cos\theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

→ Το σύστημα X καλείται ορθογώνιο $\iff$ $F = 0$.

Εμβαδό

Έστω R χωρίο με $R \subset X(U)$

Το εμβαδό του χωρίου R είναι ο αριθμός $\iint_{X(R)} \|X_u \times X_v\|\, du\, dv$

$$\|w_1 \times w_2\|^2 = \|w_1\|^2 \|w_2\|^2 - \langle w_1, w_2 \rangle^2$$

$$\|X_u \times X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2 \implies \|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$

Ισομετρίες:

Ορισμός: Έστω S και $\tilde{S}$ είναι κανονικές επιφάνειες. Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $F: S \to \tilde{S}$ καλείται ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ αν_ν

(i) F είναι διαφορομορφισμός

(ii) $\tilde{I}_{F(p)}(dF_p(u)) = I_p(u)\quad \forall u \in T_pS$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Οι ισομετρίες διατηρούν ό,τι ορίζεται μέσω της $1^{ης}$ θεμελιώδους μορφής.

(1) $L_a^b(\tilde{c}) = L_a^b(c)$, $\tilde{c} = F \circ c$.

$$\int_a^b \sqrt{\tilde{I}_{F(c(t))}((F\circ c)'(t))}\,dt = \int_a^b \sqrt{\tilde{I}_{F(c(t))}(dF(c'(t)))}\,dt = \int_a^b \sqrt{I_{c(t)}(c'(t))}\,dt$$